

## Forno

Un forno deve produrre ogni giorno pane, biscotti, focacce e paste.

Il tempo di produzione per ogni chilogrammo di ogni alimento è noto. Ai fini dell'esercizio si suppone che le quantità producibili possano essere piccole a piacere e che il tempo di cottura sia proporzionale alla quantità. Quindi se per produrre un chilogrammo serve un'ora, per produrre mezzo chilo dello stesso prodotto serve mezz'ora e così via.

È noto lo spazio occupato da un chilogrammo di ogni prodotto all'interno del forno e anche in questo caso si fa l'ipotesi che lo spazio necessario sia direttamente proporzionale alla quantità prodotta e che le quantità siano frazionabili a piacere.

I prodotti possono cuocere insieme, ma l'area del forno è limitata e pari a 4 metri quadrati. Il forno funziona per 6 ore al giorno complessivamente.

Sono dati dei fabbisogni minimi di alcuni tipi di prodotti.

Sono noti i prezzi di vendita dei prodotti.

Un ulteriore vincolo specifica che nessun prodotto deve essere sfornato in quantità superiore al doppio di un altro.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati riportati qui sotto.

Il garzone del fornaio è disposto a fare un po' di straordinario, al prezzo di 12 Euro per ogni ora di lavoro extra. Stabilire se e quanto conviene farlo lavorare in più.

Dovendo fare un'offerta speciale per attirare i clienti, che consiste nel ridurre al 50% il prezzo di uno dei tipi di prodotto, quale scelta è meglio fare se non si vuole che cambi la produzione ottima?

## Dati.

Prodotto	Tempi di produzione [h]	Spazio [mq/kg]	Produtz. minima giornaliera [kg]	Prezzo di vendita [€/kg]
Pane	1.0	1.0	5	2.50
Biscotti	3.0	0.2	2	4.00
Focacce	1.5	1.5	3	2.00
Paste	2.0	1.5	2	5.50

**Soluzione.**

Poiché la quantità di produzione si assume continua, ogni porzione dell'area del forno può essere usata in tanti modi diversi quante sono le possibili combinazioni di prodotti.

Si può supporre che la superficie disponibile sia frazionabile a piacere (benché in realtà non si possa scendere al di sotto di una dimensione minima, cioè l'area occupata da un singolo panino o biscotto...). Quindi ogni porzione di superficie del forno può essere utilizzata con un diverso pattern di prodotti, indipendentemente dalle altre porzioni di superficie. Ogni volta che inizia la produzione di un tipo di prodotto, indipendentemente dall'area occupata, quel prodotto occupa la superficie assegnatagli per un tempo dato.

Il problema si può quindi formulare con un modello di programmazione lineare con tante variabili continue non-negative quanti i possibili pattern di prodotti. Ciascuna variabile indica l'area assegnata al corrispondente pattern.

Le quantità prodotte per ciascuno dei tipi di alimenti si possono facilmente ricavare di conseguenza e su di esse si possono imporre i vincoli sulle produzioni minime richieste e sulle proporzioni.

La funzione obiettivo ovviamente, anche se non specificato esplicitamente nel testo, è la massimizzazione dei ricavi che si ottengono dalla vendita dei prodotti.

**Dati.** Si hanno:

- un insieme  $P$  di prodotti;
- il tempo unitario  $t_i$  di produzione per ogni tipo  $i \in P$ ;
- lo spazio unitario  $s_i$  occupato per ogni tipo  $i \in P$ ;
- la produzione minima  $m_i$  per ogni tipo  $i \in P$ ;
- il prezzo di vendita  $p_i$  per ogni tipo  $i \in P$ .

Sono inoltre dati il tempo totale disponibile  $T$  e l'area totale disponibile  $A$ .

**Variabili decisionali.** Le variabili corrispondono alle quantità di ogni prodotto che si decide di produrre; tali quantità non sono vincolate ad assumere valori interi. Le variabili sono non-negative ed hanno come limite inferiore la produzione minima  $m_i$  per ogni tipo  $i \in P$ . Si ha quindi  $x_i \geq m_i$  per ogni prodotto  $i \in P$  [kg].

**Funzione obiettivo.** La funzione obiettivo  $z$  da massimizzare è il ricavo totale, cioè la somma pesata delle quattro variabili, dove il peso di ciascuna è il prezzo del prodotto:

$$\text{maximize } z = \sum_{i \in P} p_i x_i.$$

**Vincoli.** Date le ipotesi sulla possibilità di frazionare a piacere le quantità prodotte distribuendole nel tempo e nello spazio, il vincolo che limita la produzione è un vincolo unico il cui termine noto è dato dal prodotto tra l'area disponibile ed il tempo disponibile. Il consumo unitario di questa risorsa unica per ogni tipo di prodotto  $i \in P$  è dato dal prodotto tra i coefficienti  $s_i$  e  $t_i$ .

$$\sum_{i \in P} t_i s_i x_i \leq T A.$$

Per imporre che nessun prodotto sia sfornato in quantità superiore al doppio di un altro si introduce l'ulteriore vincolo

$$x_i \leq 2x_j \quad \forall i \in P, \forall j \in P : i \neq j.$$

Il modello risultante è di programmazione lineare (v. file `FORNO.MOD`). Il valore ottimo risulta pari a 60,625.

L'analisi parametrica sul vincolo relativo alla risorsa rivela il prezzo-ombra del vincolo. Poiché l'area del forno misurata in mq è pari a 4, un incremento unitario del termine noto del vincolo corrisponde a 0,25 ore di lavoro straordinario e quindi ad un costo di 3 Euro. Inizialmente il prezzo-ombra del vincolo è superiore a 3 Euro (è pari a 3,21 Euro circa), quindi conviene il lavoro straordinario. Dopo il primo cambio di base però (rhs=24,35) il prezzo-ombra scende al valore di 2,5 Euro e quindi ulteriore lavoro straordinario non conviene più. Quindi la quantità di lavoro straordinario più conveniente è pari a circa 0,09 ore, cioè circa 5,4 minuti.